
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. FAVINI

SU CERTE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ASTRATTE DI
TIPO PARABOLICO

11 DICEMBRE 1986

INTRODUZIONE

Questo Seminario è dedicato allo studio della equazione lineare

$$(1) \quad \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$M(t)u(t) \Big|_{t=0} = w_0,$$

come tappa preliminare alla considerazione del problema non lineare

$$\frac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = f(t, u(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

o, più generalmente,

$$\frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = g(t, u(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

In (1), $M(t)$, $L(t)$ sono operatori lineari chiusi dallo spazio di Banach (complesso) Y nello spazio di Banach X , f è continua da $[0, \tau]$ in X e $w_0 \in X$.

Equazioni del tipo suddetto sono state considerate in [3] in spazi $L^p[0, \tau; X]$, $1 < p < +\infty$, e con condizione iniziale $w_0 = 0$, mediante la riduzione alla forma

$$(2) \quad BMu + Lu = h,$$

dove B è l'operatore di derivata rispetto a t in $L^p[0, \tau; X]$, $D(B) = W_0^{1,p}[0, \tau; X] = \{u \in L^p[0, \tau; X] : u' \in L^p[0, \tau; X], u(0) = 0\}$.

Vedremo che, sotto opportune ipotesi, concernenti il risolvente $(zM(t) + L(t))^{-1}$, una teoria analoga può essere sviluppata in spazi di funzioni continue (rispetto a t).

A tale scopo, mostreremo preliminarmente che sotto ipotesi di tipo "spettrale" piuttosto generali, la (2) ha una unica soluzione per ogni h nello spazio di interpolazione reale $(E; D(B))_{\theta, \infty}$, $0 < \theta < 1$.

Daremo poi condizioni sui dati che permettono di ricondurre la (1) alla forma (2).

1. RISOLUZIONE DI (2) E REGOLARITA' DELLA SOLUZIONE

Siano L, M due operatori lineari chiusi da F in E , E, F spazi di Banach complessi e sia B un operatore lineare chiuso da E in sé. Assumeremo che valgano le ipotesi

- H1. $B-z$ ha inverso limitato per ogni z complesso tale che $|\pi - \arg z| \leq \phi < \pi/2$, B è invertibile, ha dominio $D(B)$ chiuso in E e

$$\|(B-z)^{-1}; L(E)\| \leq C(1+|z|)^{-1}$$

per ogni z nel settore suddetto.

- H2. $D(L) \subseteq D(M)$, L è invertibile, $zM+L$ ha inverso limitato per ogni z con $|\arg z| \leq \pi - \phi + \epsilon$, $\epsilon > 0$ e

$$\|(zM+L)^{-1}; L(E)\| \leq C_1(1+|z|)^\alpha,$$

per tali z , dove $0 \leq \alpha < 1$.

Posto $ML^{-1} = T$, la (3) equivale a supporre che $z+T$ ha inverso limitato $z \neq 0$, $|\arg z| \leq \pi - \phi + \epsilon$,

$$\|(zT+1)^{-1}; L(E)\| \leq C_1(1+|z|)^\alpha.$$

Sia $V = (E; D(B))_{\theta, \infty}$, $0 < \theta < 1$. Poiché vale H_1 , V coincide [vedi [4]] come lo spazio di tutti gli $a \in E$ tali che $\{a\} = \sup_{t>0} \|t^\theta B(B+t)^{-1}a; E\| < \infty$. Inoltre,

$$\|a\|_{\theta, \infty} = \|a; E\| + \{a\}$$

è una norma equivalente a quella naturalmente definita in $(E; D(B))_{\theta, \infty}$.

Se poi $-B$ genera un semigruppato limitato in E , allora $a \in (E; D(B))_{\theta, \infty}$ se e solo se $a \in E$ e

$$t \rightarrow t^{-\theta} \|e^{-tB} a - a; E\|$$

è limitata in $(0, +\infty)$.

Sia Γ la curva nel piano complesso parametrizzata da $z = re^{+i\psi}$, $\psi = \pi - \phi + \frac{\epsilon}{2}$, per $r \geq a_0 > 0$ e da $z = a_0 e^{iw}$, $|w| \leq \pi - \phi + \epsilon/2$, dove a_0 è sufficientemente piccolo.

La terza ipotesi, essenziale per i risultati successivi, è allora la seguente:

H3. Si denoti con $[B; (zT+1)^{-1}]$ il commutatore $B(zT+1)^{-1} - (zT+1)^{-1}B$, definito in $D(B)$. Allora $[B; (zT+1)^{-1}]$ ha una estensione limitata da E in sé e da V in sé ed esistono $C'' > 0$, $0 \leq \sigma < 1$, tali che

$$(4) \quad \|[B; (zT+1)^{-1}]\|; L(E) \leq C''(1+|z|)^\sigma,$$

$$(5) \quad \|[B; (zT+1)^{-1}]\|; L(V) \leq C''(1+|z|)^\sigma$$

per ogni $z \in \Gamma$.

Osservazione 1. La H3 è soddisfatta se vale (4) e, invece di (5),

$$\|[B; [B; (zT+1)^{-1}]]\|; L(E) \leq C_1(1+|z|)^\sigma, \quad z \in \Gamma.$$

Infatti, allora

$$B[B; (zT+1)^{-1}] = [B; [B; (zT+1)^{-1}]] + [B; (zT+1)^{-1}]B$$

implica

$$\| [B; (zT+1)^{-1}] u; D(B) \| \leq c_1 (1+|z|)^\sigma (\|u; E\| + \|Bu; E\|);$$

si ottiene il risultato per interpolazione.

Osservazione 2. E' facile riconoscere che c'è una costante $K > 0$ tale che per ogni $a \in V$,

$$\|a; E\| + \sup_{z \in \Gamma} \| |z|^\theta B(B-z)^{-1} a; E \| \leq K \|a; V\|.$$

Osservazione 3. Sia $\tilde{B} = B+s$, $s > 0$. Allora $(E; D(B))_{\theta, \infty} = (E; D(\tilde{B}))_{\theta, \infty}$, con equivalenza delle norme. Inoltre, se vale H3, allora

$$\| [\tilde{B}; (zT+1)^{-1}] (\tilde{B}-z)^{-1}; L(V) \| \leq C (1+|z-s|)^{-1} (1+|z|)^\sigma, z \in \Gamma.$$

Ciò premesso, vale il risultato di esistenza e unicità per la soluzione di (2).

Teorema 1. Valgano H1,2,3 e sia $\alpha < \theta < 1$. Allora per ogni $h \in V$ e ogni s sufficientemente grande il problema

$$(6) \quad (B+s) Mu + Lu = h$$

ha una unica soluzione.

Cenno della dimostrazione

Posto $Lu = v$, (6) viene trasformato nel problema

$$(B+s)Tv + v = h, T = ML^{-1}.$$

Se $f \in V$, si pone ($\tilde{B} = B + s$), con Γ orientata dal basso verso l'alto,

$$Sf = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} z^{-1} (zT+1)^{-1} \tilde{B}(\tilde{B}-z)^{-1} f \, dz.$$

Si vede subito che

$$\tilde{B}TSf + Sf = f - (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} z^{-1} [B; (zT+1)^{-1}] (\tilde{B}-z)^{-1} f = (1-W)f.$$

Poiché

$$\left\| \int_{\Gamma} z^{-1} [B; (zT+1)^{-1}] (\tilde{B}-z)^{-1} dz; L(V) \right\| \leq C \int_{\Gamma} |z|^{-1+\sigma} (1+|z+s|)^{-1} d|z|$$

tende a 0 per $s \rightarrow \infty$, $1-W$ ha inverso limitato in V e così $S(1-W)^{-1}h$ risolve la (6). L'unicità si dimostra come in [3]. Non è altrettanto semplice far vedere che l'operatore S precedentemente introdotto è continuo da V in $sé$. Tuttavia, si prova il

Teorema 2. Valgono $H_{1,2,3}$ e $\alpha < \theta < 1$. Allora la soluzione u di (6) soddisfa $Lu, BMu \in (D; D(B))_{\theta-\alpha, \infty}$.

Per la dimostrazione, si utilizza la Osservazione 2, il fatto che B è invertibile e che l'integrale

$$\int_{\Gamma} t^{\theta-\alpha} |z+t|^{-1} (1+|z|^{\alpha}) |z|^{-\theta} d|z|$$

è limitato (si ricordi che $\theta > \alpha$) come funzione di $t > 0$.

Naturalmente se B e T commutano, nel senso che $[(B-z)^{-1}; (zT+1)^{-1}] = 0$ per ogni $z \in \Gamma$ ($[B; (zT+1)^{-1}] = 0$), si può prendere $s = 0$ in (6) e si ottiene soluzione per la (2).

2. APPLICAZIONE A EQUAZIONI DIFFERENZIALI ASTRATTE

Siano X, Y spazi di Banach complessi, $L(t)$ e $M(t)$ siano famiglie di operatori lineari chiusi da Y in X , dove $L(t)$ ha inverso limitato per ogni $t \in [0, \tau]$, $\tau > 0$ e $D(L(t)) \subseteq D(M(t))$ per ogni t .

Si assume che $t \rightarrow M(t)L(t)^{-1} = T(t)$ sia continua da $[0, \tau]$ a $L(X)$ e che $t \rightarrow L(t)^{-1}$ sia continua da $[0, \tau]$ in $L(X; Y)$. ($L(X; Y)$ è lo spazio delle applicazioni lineari limitate da X in Y , con la norma usuale, $L(X; X) = L(X)$).

Infine, sia $w_0 \in X$ e supponiamo f continua da $[0, \tau]$ in X . Diremo che $u = u(t)$, $t \in [0, \tau]$ è una soluzione stretta del problema

$$(7) \quad \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$M(t)u(t) \Big|_{t=0} = w_0,$$

se $u \in C[0, \tau; Y]$, $u(t) \in D(L(t)) \quad \forall t \in [0, \tau]$, $t \rightarrow M(t)u(t) \in C^{(1)}[0, \tau; X]$ e vale (7).

Ora, in virtù delle precedenti ipotesi, (7) equivale a trovare una soluzione stretta del problema [si ponga $L(t)u(t) = v(t)$]:

$$(8) \quad \frac{d}{dt}(T(t)v(t)) + v(t) = f(t), \quad t \in [0, \tau],$$

$$T(t)v(t) \Big|_{t=0} = w_0.$$

Vedremo di dare condizioni abbastanza semplici su $L(t)$, $M(t)$, $f(t)$, w_0 che permettono di applicare i Teoremi 1 e 2.

Posto

$$D(B) = \{u \in C^{(1)}[0, \tau; X] : u(0) = u'(0) = 0\}, \quad Bu = u',$$

prenderemo come spazio E nel Teorema 1 lo spazio $C_0[0, \tau; X] = \{u \in C[0, \tau; X] : u(0) = 0\}$.

Notiamo subito che allora $(E, D(B))_{\theta, \infty}$, $0 < \theta < 1$, coincide con lo spa-

zio delle funzioni hölderiane da $[0, t]$ in X , nulle nell'origine, normato da

$$\|u; C_0^\theta[0, \tau; X]\| = \max_{0 \leq t \leq \tau} \|u(t); X\| + \sup_{0 \leq t, s \leq \tau} \frac{\|u(t) - u(s); X\|}{|t - s|^\theta},$$

$u \in C_0^\theta[0, \tau; X]$, [vedi [2,4]].

Occorre adesso trasformare (8) in un problema a condizione iniziale nulla. Non utilizzeremo alcuni noti risultati di traccia; entreremo in serie difficoltà in quanto è presente l'operatore $M(t) \neq I$, in generale.

Assumiamo quindi $w_0 \in R(T(0)) = \text{immagine di } T(0)$. Inoltre, supponiamo che $t \rightarrow T(t)$ sia $C^{(1)}$ da $[0, \tau]$ in $L(X)$ e che $f(0) - (1 + T'(0))v_0 = T(0)\psi_0$, dove $w_0 = T(0)v_0$.

Posto $\phi(t) = v_0 + t\psi_0$, $v(\cdot)$ soddisfa (8) se

$$\frac{d}{dt} \{T(t)[v(t) - \phi(t)]\} + \frac{d}{dt} (T(t)\phi(t)) + [v(t) - \phi(t)] = f(t) - \phi(t), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$T(t)[v(t) - \phi(t)]|_{t=0} = 0.$$

Posto $w(t) = v(t) - \phi(t)$, tutto è ricondotto a risolvere

$$\frac{d}{dt} (T(t)w(t)) + w(t) = f(t) - \phi(t) - T'(t)\phi(t) - T(t)\psi_0, \quad t \in [0, \tau], \quad T(t)w(t)|_{t=0} = 0 \quad (9)$$

Ipotesi che assicurano la validità di H2,3, con $V = C_0^\theta[0, \tau; X]$, possono allora essere

- (i) la funzione $t \rightarrow T(t) \in C^{(1)}[0, \tau; L(X)]$ ed esistono $C > 0$, $0 < \theta < 1$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \delta_1, \delta_2 < 1$ tali che

$$\|L(t)(zM(t) + L(t))^{-1}; L(X)\| \leq C(1 + |z|)^\alpha$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$, $|\arg z| \leq \pi/2 + \eta_0$, $\eta_0 > 0$, $0 \leq t \leq \tau$,

$$(ii) \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} (zT(t)+1)^{-1}; L(X) \right\| \leq C(1+|z|)^{\sigma_1}, \quad |\arg z| \leq \pi/2 + \eta_0, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$(iii) \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} (zT(t)+1)^{-1} - \frac{\partial}{\partial s} (zT(s)+1)^{-1}; L(X) \right\| \leq C(1+|z|)^{\sigma_2} |t-s|^{\theta}.$$

Dai Teoremi 1, 2 si deduce

Teorema 3. Sotto le ipotesi (i), (ii), (iii), il problema (7) ha una unica soluzione stretta u per ogni $f \in C^{\theta}[0, \tau; X]$, $\alpha < \theta < 1$, e per ogni $w_0 \in X$ tali che

$$(10) \quad \begin{aligned} w_0 (= T(0)v_0) &\in R(T(0)) \quad \text{e} \\ f(0) - v_0 - T'(0)v_0 (= T(0)\psi_0) &\in R(T(0)). \end{aligned}$$

Inoltre, $t \mapsto L(t)u(t)$, $t \mapsto \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) \in C^{\theta-\alpha}[0, \tau; X]$.

Si noti che

$$T'(t) = -(T(t)+1) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (T(t)+1)^{-1} \right\} (T(t)+1)$$

e così $\|T(t)-T(s); L(X)\| \leq K |t-s|$ implica che

$$\|T'(t)-T'(s); L(X)\| \leq K' |t-s|^{\theta}, \quad K, K' > 0.$$

Ciò assicura che $f(t) - \phi(t) - T'(t)\phi(t) - T(t)\psi_0$ definisce un elemento di $C^{\theta}_0[0, \tau; X]$, in forza della condizione di compatibilità (10). E' poi immediato riconoscere che da (i), (ii), (iii) seguono H2,3.

Infine, si può prendere $s = 0$; basta effettuare, inizialmente, un cambiamento di variabile $u(t) = e^{kt} u_1(t)$, k grande. (9) è quindi risolta, e così lo è (7).

Osservazione 4. Notiamo che se $M(t) \equiv I$, $w_0 = T(0)v_0$ si legge

$w_0 \in D(L(0))$ e $f(0) - (1+T'(0))v_0 \in R(\bar{T}(0))$ diventa

$f(0) - L(0)w_0 - \left\{ \frac{d}{dt} L(t)^{-1} \right\}_{t=0} L(0)w_0 \in D(L(0))$, una condizione molto vicina e un po' più restrittiva di quella data in [1, p. 45].

Corollario 1. Se $L(t)$, $M(t)$ sono operatori lineari chiusi $\forall t \in \bar{\Delta} - a$, $a > 0$, dove Δ è un intorno complesso di $[0, \tau]$, tali che $T(t) = M(t)L(t)^{-1}$ è olomorfa in $-a + \Delta$, $zM(t) + L(t)$ ha inverso limitato $\forall t \in -a + \bar{\Delta}$ e per ogni $z \in \Sigma : |\arg z| \leq \omega$, $\pi/2 < \omega < \pi$, con

$$\|(zT(t)+1)^{-1}; L(X)\| \leq \text{Cost},$$

per tutti questi z e t , allora (i), (ii), (iii) sono soddisfatte, con $\alpha=0$, $\theta=1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$.

Un'altra condizione che consente di utilizzare il Teorema precedente è data da

Corollario 2. Supponiamo che $L(t)$ abbia dominio $D \subseteq X$ indipendente da t , $t \rightarrow L(0)L(t)^{-1}$ sia continua da $[0, \tau]$ in $L(X)$, per ogni $f \in D$, esistono le derivate fortemente continue $L'(t)f, L''(t)f$ [e così $\|L^{(k)}(t)L(t)^{-1}; L(X)\| \leq \text{cost.}$, $k = 1, 2$].

Esistano poi, per ogni $f \in D$, le derivate fortemente continue $M'(t)f, M''(t)f$, con

$$\max\{\|M^{(k)}(t)f; X\|, k=1,2\} \leq C \|M(t)f; X\|, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$\|(zT(t)+1)^{-1}M'(t)f; X\| \leq C \|(zT(t)+1)^{-1}M(t)f; X\|, \quad 0 \leq t \leq \tau, z \in \Gamma, f \in D.$$

Allora, la condizione (i) con $\alpha=0$ implica (ii) e (iii), con $\delta_1=\delta_2=0$, $\theta=1$.

Osservazione 5. Sia $X = Y$ e sia $M(t) \equiv 1$. Supponiamo, inoltre, che risulti

$$\|(L(t)+z)^{-1}; L(X)\| \leq C(1+|z|)^{-1}$$

per tutti gli z con $\operatorname{Re} z \geq 0$ (e quindi in un settore contenente tale semipiano),
e $t \rightarrow L(t)^{-1}$ è $C^{(1)}$ da $[0, \tau]$ in $L(X)$, con

$$\|L(t)(z+L(t))^{-1} (L(t)^{-1})'; L(X)\| \leq C|z|^{-\rho}, \quad 0 < \rho \leq 1.$$

Queste sono le ipotesi di A. Yagi in [5,6]. E' allora facile vedere che

$$\|\frac{\partial}{\partial t} (zL(t)^{-1}+1)^{-1}; L(X)\| \leq C |z|^{1-\rho}$$

D'altra parte, formalmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (zL(t)^{-1}+1)^{-1} &= 2z^2[(zT(t)+1)^{-1}T'(t)]^2 (zT(t)+1)^{-1} - \\ &\quad - z[(zT(t)+1)^{-1}T''(t)] (zT(t)+1)^{-1}. \end{aligned}$$

Così, se $1/2 < \rho \leq 1$, $t \rightarrow L(t)^{-1}$ è $C^{(2)}$ da $[0, \tau]$ in $L(X)$, e

$$\|L(t)(z+L(t))^{-1} (L(t)^{-1})''; L(X)\| \leq C|z|^{-\rho-1},$$

dove $0 < \rho_1 \leq 1$, il problema (7) ha una unica soluzione stretta per ogni $f \in C^0[0, \tau; X]$, $0 < \theta < 1$, e ogni $w_0 \in D(L(0))$ per cui

$$f(0) - (1 + [\frac{d}{dt} L(t)^{-1}]_{t=0})L(0)w_0 \in D(L(0)),$$

[vedi l'Osservazione 4].

Osservazione 6. Sotto opportune ipotesi sui dati, il problema

$$\begin{aligned}
 & C(t)u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \\
 (11) \quad & u(0) = u_0,
 \end{aligned}$$

può essere ricondotto ad un problema di tipo (7).

Limitiamoci al caso in cui $A(t) \equiv A$ e $C(t) \equiv C$ sono indipendenti da t , A ha inverso limitato da X a Y , $D(A) \subseteq D(C)$, $\|A(zC+A)^{-1}; L(X)\| \leq \text{Cost.}$, $\text{Re} z \geq 0$.

Ovviamente, una funzione $u: [0, \tau] \rightarrow Y$ è detta essere una soluzione stretta di (11) se $u(t) \in D(A)$ per ogni $t \in [0, \tau]$, $u \in C^{(1)}[0, \tau; Y]$, $t \rightarrow Au(t)$, $t \rightarrow Cu'(t)$ sono fortemente continue da $[0, \tau]$ in X , con f continua, e vale (11). Ora, la (11) si scrive

$$\begin{aligned}
 & A^{-1}Cu'(t) + u(t) = A^{-1}f(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \\
 & u(0) = u_0.
 \end{aligned}$$

Consideriamo il problema (in $D(A)$)

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt}(A^{-1}Cv(t)) + v(t) = A^{-1}f'(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \\
 & A^{-1}Cv|_{t=0} = A^{-1}[f(0) - Au_0].
 \end{aligned}$$

E' facile vedere, applicando quello che si è prima ottenuto, che se $f \in C^{1,0}[0, \tau; X]$, e $f(0) - Au_0 = Cv_0 \in R(C)$, $A^{-1}f'(0) - v_0 = A^{-1}Cv_1$, con $v_0, v_1 \in D(A)$, cioè $f(0) - Au_0 - CA^{-1}f'(0) \in R((CA^{-1})^2)$, allora (11) ha una unica soluzione stretta.

ESEMPI

Esempio 1. Rimandando a [3, pp. 34-40, Examples 1 & 2], la teoria qui sviluppata si applica a problemi del tipo

$$\partial(m(t,x)u(t,x))/\partial t + A(t,x,D)u(t,x) = h(t,x), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad x \in \Omega$$

$$u(t,x) = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$m(t,x)u(x,t)|_{t=0} = w_0(x), \quad x \in \Omega,$$

dove $A(t,x,D)$ è definito da

$$A(t,x,D) u(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2r} a_\alpha(t,x) D^\alpha u(x),$$

Ω è un dominio aperto limitato di R^n , con frontiera regolare e $m(t,x)$ è una funzione continua e non negativa su $[0,\tau] \times \bar{\Omega}$.

Piccole modifiche alle ipotesi di [3] permettono di ottenere risultati di esistenza e unicità per tali problemi, dove lo spazio $W^{\theta,p}(0,\tau;X)$ va sostituito con $C^\theta[0,\tau;X]$, X essendo uno spazio L^2 con peso, dipendente dalla funzione $m(x,t)$, oppure lo spazio $L^2(\Omega)$.

Esempio 2. Un problema considerato da G. Fichera in [7] è

$$\frac{\partial}{\partial t} (L(x,D)u(t,x)) + L^2(x,D)u(t,x) = f(t,x), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad x \in \Omega,$$

$$D^p u(t,x) = 0, \quad 0 \leq |p| \leq 2m-1, \quad t \in [0,\tau], \quad x \in \partial\Omega,$$

$$L(x,D)u(0,x) = w_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\text{dove } L(x,D) = \sum_{|p|, |q| \leq m} D^p a_{pq}(x) D^q, \quad D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}},$$

Ω un aperto limitato di R^n , a_{pq} è una matrice sufficientemente regolare, e viene soddisfatta la usuale ipotesi di coercività.

I nostri risultati si applicano a questo problema e a equazioni più generali del tipo

$$\frac{\partial}{\partial t} (L(x,D)u) + L_1(x,D)u = f,$$

anche in spazi $L^p(\Omega)$, $p \neq 2$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ACQUISTAPACE, P., TERRONI, B.: Some existence and regularity results for abstract non-autonomous parabolic equations, Math. Anal. Appl. 99 (1984), 9-64.
- [2] DA PRATO, G., GRISVARD, P.: Sommes d'opérateurs linéaires et Equations différentielles opérationnelles, J. Math. Pures Appl. 54 (1975), 305-387.
- [3] FAVINI, A.: Degenerate and singular evolution equations in Banach space, Math. Ann. 273 (1985), 17-44.
- [4] GRISVARD, P.: Spazi di tracce e applicazioni, Rend. Matem. 5 (1972), 657-729.
- [5] TANABE, H.: Equations of evolution, London: Pitman 1979.
- [6] YAGI, A.: On the abstract linear evolution equations in Banach spaces, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 290-303.
- [7] FICHERA, G.: On a class of evolution problems, Proced. Royal Soc. Edin. 95 A (1983), 247-256.